サイクロイド振り子の等時性

このスライドの目標

→ サイクロイド振り子の等時性
(振幅によらず周期が一定であること)
を数学的に証明する

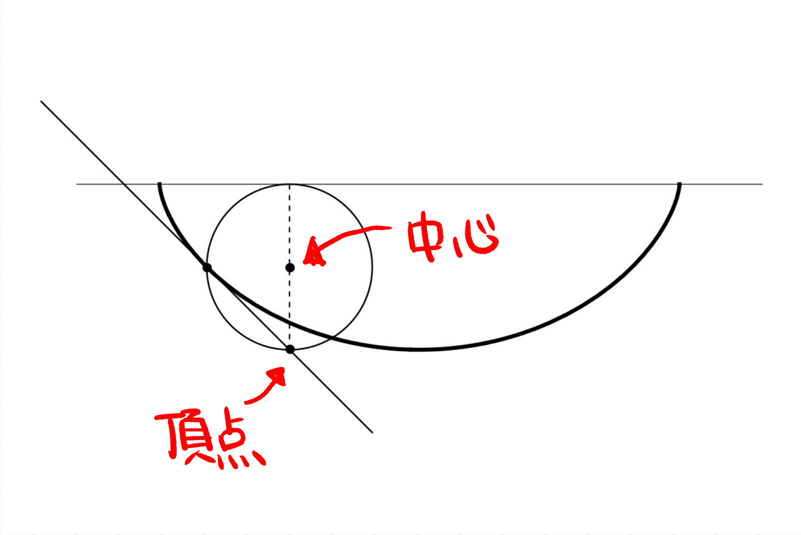
もくじ

- サイクロイドの接線の性質 ← 準備
- サイクロイドの等時性の証明 ← メインテーマ

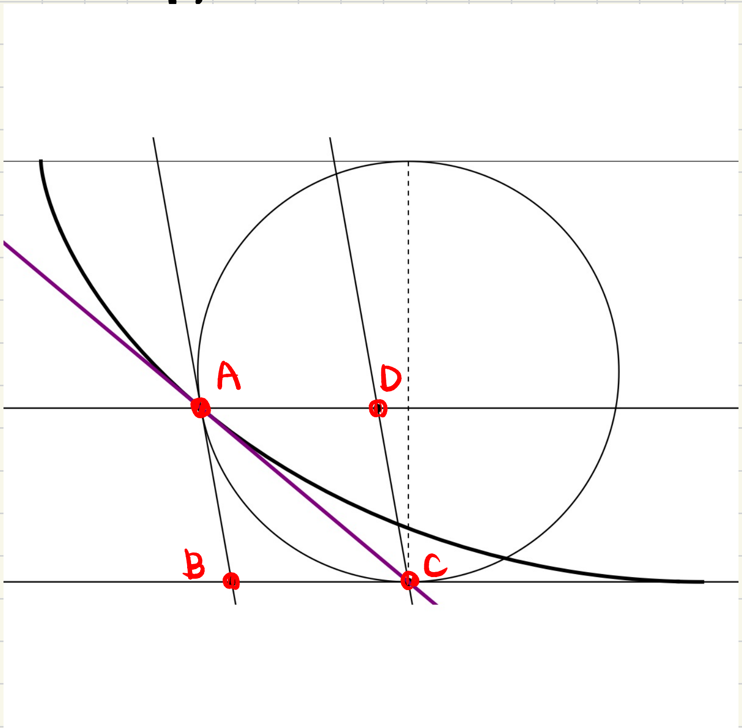
▶サイクロイドの接線の性質

次の定理を証明する

サイクロイド上の点における接線は
生成円の頂点を通過する。



(証明)



Step 1 いくつか点を設定する

サイクロイド上の点をA,
生成円上の点をCとする.
Aを通る生成円の接線と
Cを通りx軸に平行な直線
との交点をB,
直線ABに平行でCを通る
直線とAを通りx軸に
平行な直線との交点をDとする.

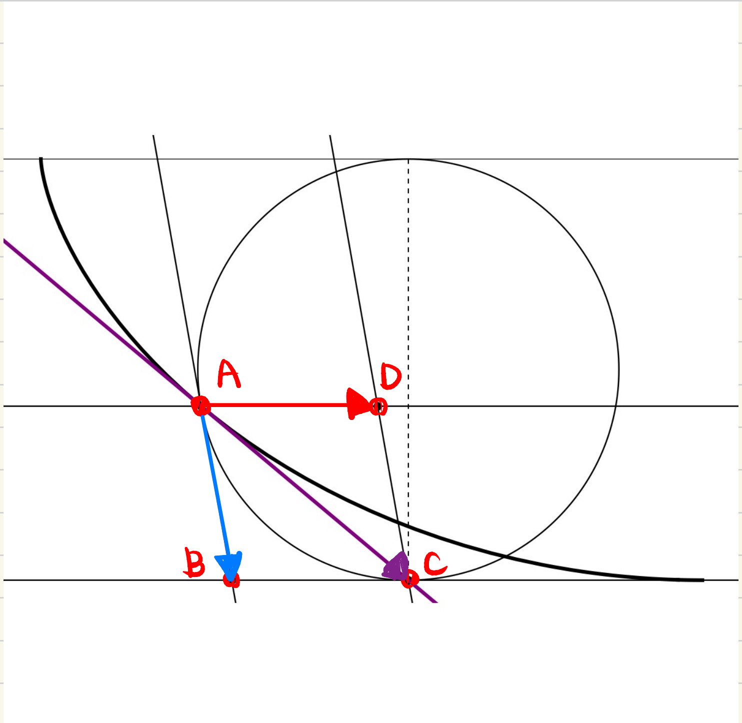
Step 2. ABCDがひし形となることを示す

点のとり方より，ABCDは平行四辺形となる.

点Bは生成円の2つの接線の交点なので，BA=BC.

上の2つの事実より，4つの辺がすべて等しい平行四辺形となるので，ABCDはひし形である

Step 3. サイクロイドの接ベクトルが、直線AC上にあることを示す



サイクロイド上の点の運動は

『その場で円が回転』

＋

『水平方向への移動』

という2つの運動に分解できる

また、サイクロイドの性質より、

『生成円の回転の速さ』＝『水平方向への移動の速さ』

となる。よって、

『サイクロイドの接ベクトル』

＝『生成円の回転の速さ』＋『水平方向への移動の速さ』

＝『$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ の方向』

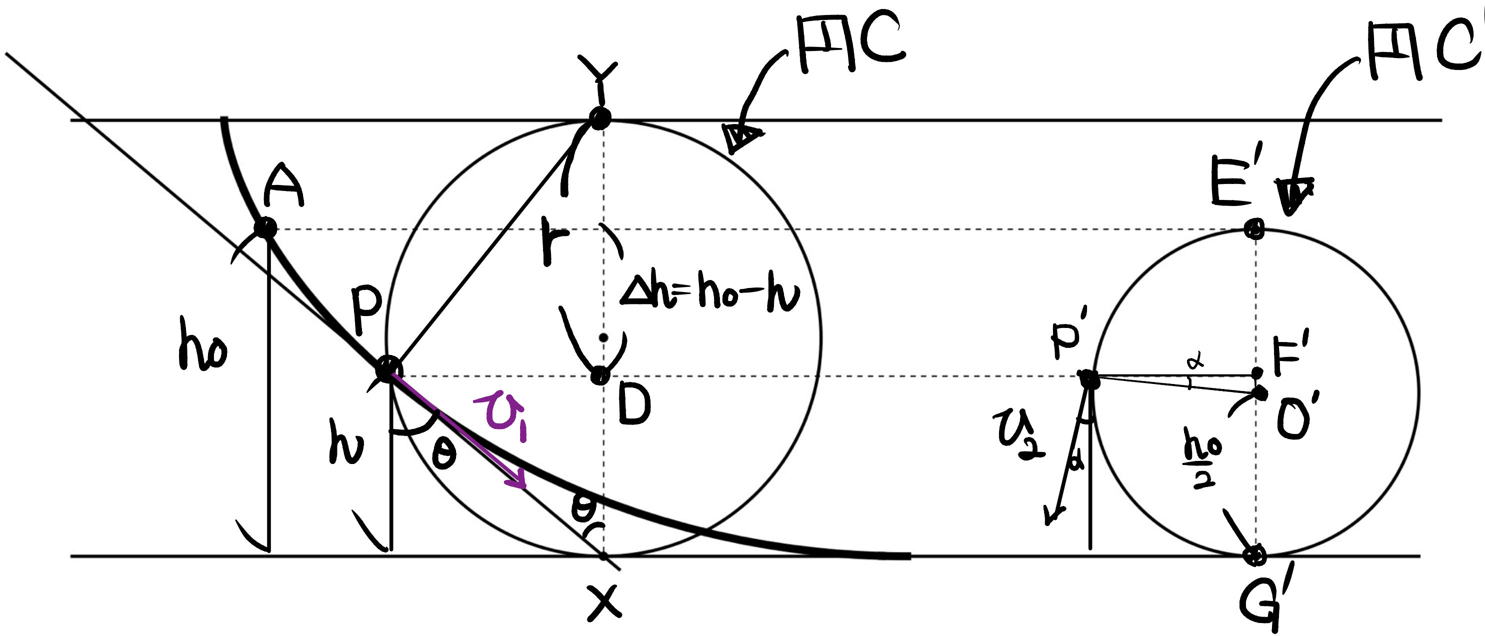
＝『$\overrightarrow{AC}$ の方向』 となり示せた。

▷サイクロイドの等時性の証明

次の定理を証明する

サイクロイド振り子の周期は
その振幅に依存しない.

(証明)　まず下図のように設定する.



点Aからサイクロイドに沿って
球を落下させたとする
小球がPに達した時の高さをh, 速さをυとする
エネルギー保存則より,

$$mgh_0 = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad v_1 = \sqrt{2g\Delta h}$$

となる。
ΔYPXで$\cos\theta = \dfrac{PX}{2r}$, ΔPDXで$\cos\theta = \dfrac{h}{PX}$なので,

$\cos^2\theta = \dfrac{h}{2r}$ となる.

速さv_1の鉛直成分は

$$v_1\cos\theta = \sqrt{2g\Delta h}\cdot\sqrt{\frac{h}{2r}} = \sqrt{\frac{g}{r}\cdot\Delta h\cdot h}$$

となる.

一方, 円C'の円周上を速さv_2で動く小球が点P'に到達したと考える.

v_2と鉛直方向のなす角をαとすると,

$\triangle P'F'O'$で $\cos\alpha = \dfrac{2P'F'}{h_0}$,

また$\triangle E'P'F' \backsim \triangle P'G'F'$より, $\dfrac{P'F'}{\Delta h} = \dfrac{h}{P'F'}$

となるので, $P'F' = \sqrt{\Delta h \cdot h}$ となり,

$\cos\alpha = \dfrac{2}{h_0}\sqrt{\Delta h \cdot h}$ となる.

よって, v_2の鉛直成分は,

$v_2 \cos\alpha = \dfrac{2v_2}{h_0}\sqrt{\Delta h \cdot h}$ となる.

サイクロイド上の運動は

『回転方向』と『水平方向』に分解される

よって、(v_1の鉛直成分)=(v_2の鉛直成分)となる。

計算すると、

(v_1の鉛直成分)=(v_2の鉛直成分)

$\Leftrightarrow\ v_2=\frac{h_0}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}$ となる

円C上の回転運動の周期をT'とすると、

$$T' = \frac{2\pi \cdot \frac{b}{2}}{v_2} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$ となる.

サイクロイド振り子の周期TはT=2T'より、

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

このTはんに依存していない.

よって題意は示せた.

[参考文献]

- Simon G. Dinkin (三浦伸夫 訳),
  『ガリレイの17世紀』, 丸善出版, 2012.
- 田端毅, 讃岐勝, 礒田正美,
  『曲線の事典』, 共立出版, 2009.