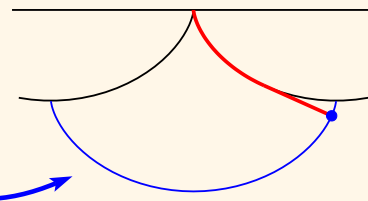


このスライドの目標

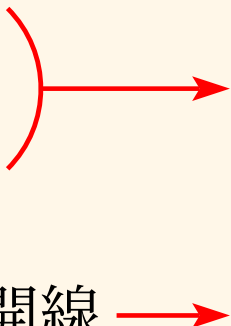
→ サイクロイドを当て板とした
振り子の軌道もまた
サイクロイドを描くことがわかる

『サイクロイド振り子』

この曲線もサイクロイド!

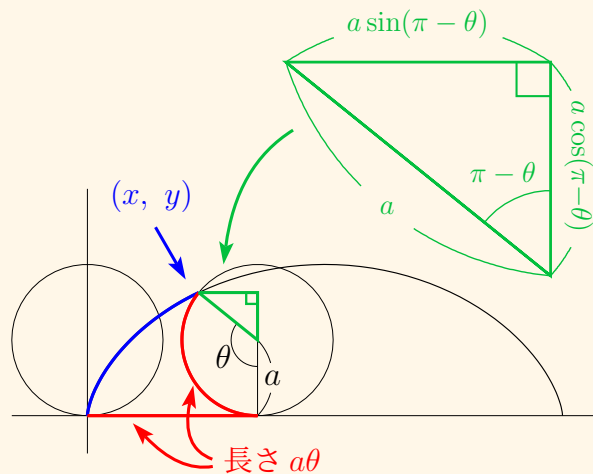


もくじ

- サイクロイドとは
 - 曲線の伸開線
 - サイクロイドの伸開線
- 
- 準備
- メインテーマ

サイクロイドとは

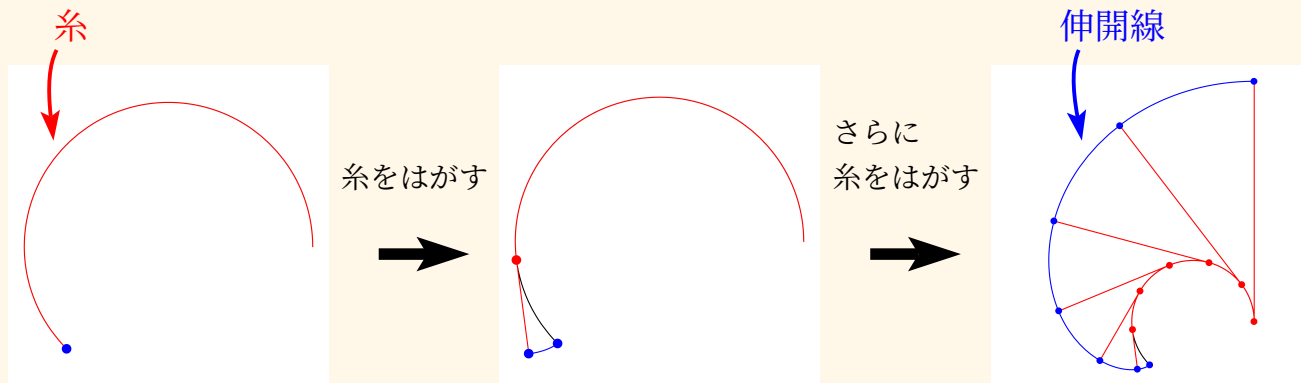
一直線上を一つの円が
すべることなく転がる
とき，この円の周上に
固定された一点が描く
曲線



$$\begin{aligned} x &= a\theta - a \sin(\pi - \theta) & y &= a + a \cos(\pi - \theta) \\ &= a\theta - a \sin \theta & &= a - a \cos \theta \\ &= a(\theta - \sin \theta) & &= a(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

曲線の伸開線

→ 与えられた曲線に沿ってピンと張った糸を
端点を固定してはがしたときのもう一方の
端点の軌跡



サイクロイドの伸開線

前ページの内容から

『サイクロイドの伸開線』 = 『サイクロイド振り子の軌道』

となることがわかる。

次ページ以降では、以下の事実を証明する。



サイクロイドの伸開線は
サイクロイドになる。

証明) 状況の整理

当て板となっている
サイクロイドの式を

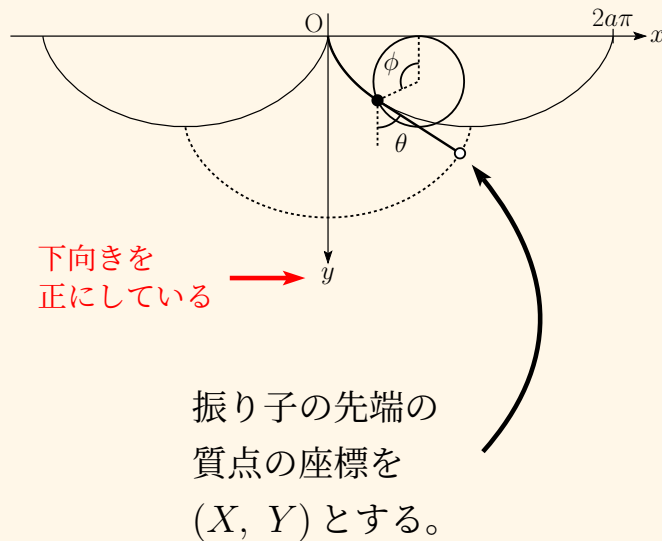
$$c(\phi) = (x(\phi), y(\phi))$$

$$\begin{cases} x(\phi) = a(\phi - \sin \phi) \\ y(\phi) = a(1 - \cos \phi) \end{cases}$$

とおく。

振り子の糸の長さ L を

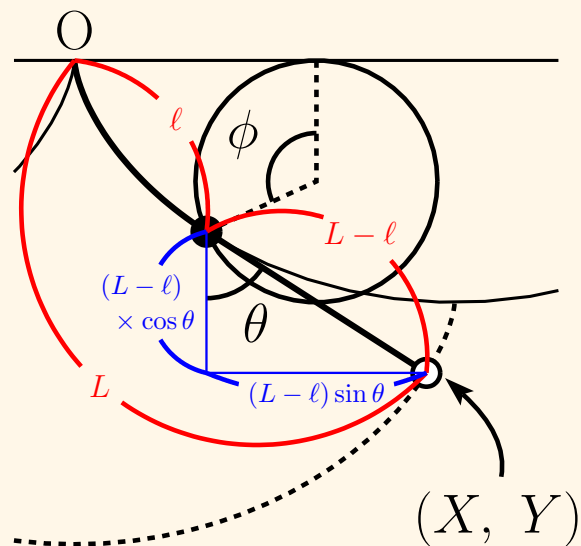
$$L = 4a \text{ とする。}$$



振り子の上端から
 接点までの長さを ℓ ,
 ピンと張った糸と
 鉛直方向のなす角を θ
 とする。
 このとき,
 質点の座標 (X, Y) は,

$$X = x(\phi) + (L - \ell) \sin \theta$$

$$Y = y(\phi) + (L - \ell) \cos \theta$$
 となる。



ℓ について

ℓ は、サイクロイドの $t = 0$ から
 $t = \phi$ ($0 \leq \phi \leq \pi$) までの長さなので、

$$\ell = \int_0^{\phi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

$$= \int_0^{\phi} 2a \sin \frac{t}{2} dt$$

$$= 4a \left(1 - \cos \frac{\phi}{2} \right)$$

となる。

θ について

図より

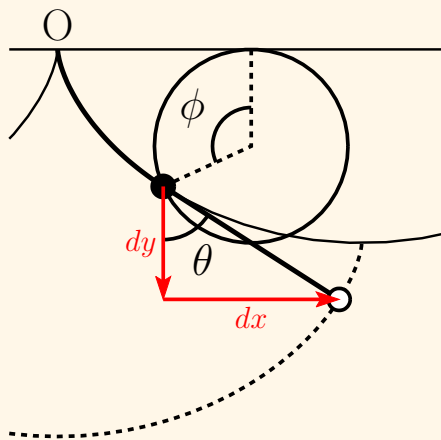
$$\frac{dx}{dy} = \tan \theta$$

となることがわかる。

一方,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cancel{a}(1 - \cos \phi)}{\cancel{a} \sin \phi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}{2 \cancel{\sin \frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2}} = \tan \frac{\phi}{2}$$

より, $\theta = \frac{\phi}{2}$ となる。



ℓ と θ を (X, Y) の式に当てはめると,

$$\begin{aligned} X &= a(\phi - \sin \phi) + \left\{ 4a - 4a \left(1 - \cos \frac{\phi}{2} \right) \right\} \sin \frac{\phi}{2} \\ &= a(\phi - \sin \phi) + 4a \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} \\ &= a(\phi - \sin \phi) + \underline{2a \sin \phi} \quad \curvearrowright \quad 2 \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} = \sin \phi \\ &= a(\phi + \sin \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= a(1 - \cos \phi) + \left\{ 4a - 4a \left(1 - \cos \frac{\phi}{2} \right) \right\} \cos \frac{\phi}{2} \\ &= a(1 - \cos \phi) + 4a \cos^2 \frac{\phi}{2} \\ &= a(1 - \cos \phi) + \underline{2a(1 + \cos \phi)} \quad \curvearrowright \quad \cos^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1 + \cos \phi}{2} \\ &= a(1 + \cos \phi) + 2a \end{aligned}$$

ここで、 $\phi = \phi' - \pi$ と変換すると

$$X = a(\phi' - \sin \phi') - a\pi$$

$$Y = a(1 - \cos \phi') + 2a$$

となり、サイクロイドの式を x 軸方向に $-a\pi$,
 y 軸方向に $+2a$ 平行移動したものと一致する
ことがわかる。 ■

〔参考文献〕

- 岡崎隆，池田清朗，沢田康太，宮崎隆也，寺島靖香，
『振り子の等時性とその破れ－単振子，サイクロイド振子，
実体振子の運動－』，日本物理教育学会誌，第58巻1号，49
－ 52， 2019.